

Sistem Bilangan Real (Nilai Mutlak) dan Fungsi

Drs. Riyanto, M.Si

Fakultas Teknologi Informasi
Universitas Mercu Buana Yogyakarta

Nilai Mutlak

Konsep nilai mutlak sangat berguna dalam kalkulus

Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan oleh $|x|$, didefinisikan sebagai:

$$|x| = x \quad \text{jika } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{jika } x < 0$$

Sifat-Sifat Nilai Mutlak

$$|ab| = |a| |b|$$

$$|a+b| = |a| + |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \geq |a| - |b|$$

Ketaksamaan yang Melibatkan Nilai Mutlak

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| > a \iff x < -a \text{ atau } x > a$$

Contoh Soal

Selesaikan:

$$|x| < 3$$

Penyelesaian : $x > 3$ atau $x < -3$

Dalam bentuk selang: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$$|x - 4| < 2$$

$$-2 < x - 4 < 2$$

$$2 < x < 6$$

$$|3x - 5| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 5 \leq -1 \quad \text{atau} \quad 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \quad \text{atau} \quad 3x \geq 6$$

$$x \leq \frac{4}{3} \quad \text{atau} \quad x \geq 2$$

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty)$$

Selesaikan

$$|x - 4| < 1,5$$

Andaikan ε (epsilon) adalah suatu bilangan positif.

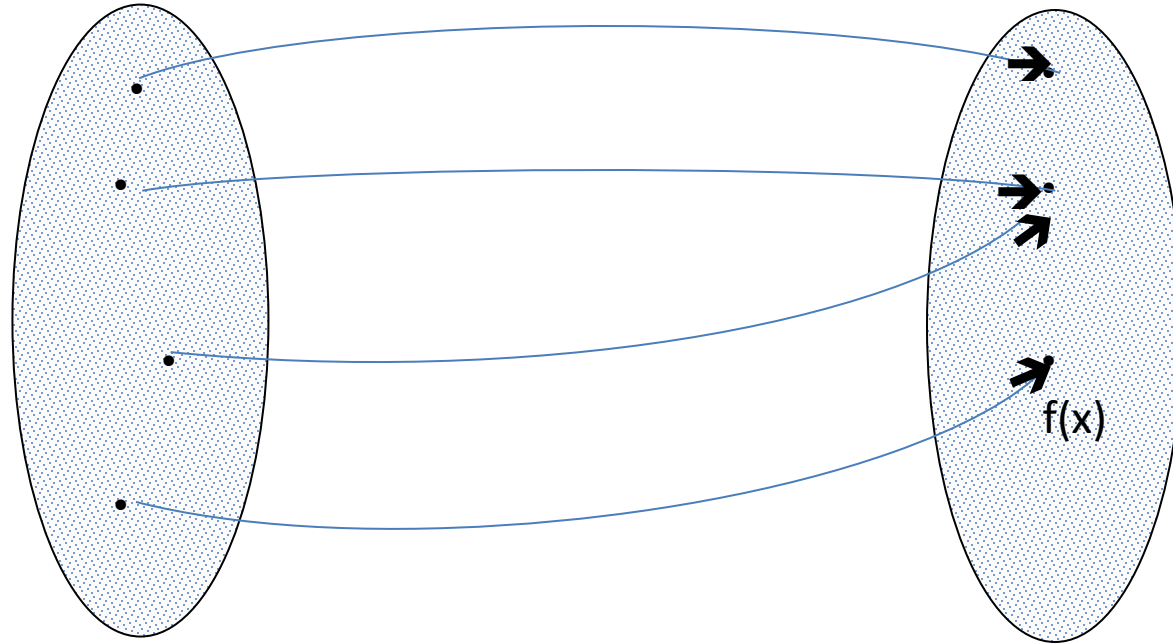
Buktikan bahwa

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \iff |5x - 10| < \varepsilon$$

FUNGSI

- Sebuah fungsi adalah suatu atauran korespondensi (padanan) yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi (lihat gambar berikut)

Sebuah Fungsi
 f



Daerah
Asal

Daerah
Hasil

Cara Menuliskan Fungsi

Untuk memberi nama fungsi digunakan sebuah huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Maka $f(x)$, yang dibaca “f dari x atau “f pada x”, menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Jadi $f(x) = x^3 - 4$,

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$

$$f(a) = a^3 - 4$$

$$f(a+h) = (a+h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Contoh Soal:

untuk $f(x) = x^2 - 2x$ cari dan sederhanakan

(a) $f(4)$

(b) $f(4+h)$

(c) $f(4+h) - f(4)$

(d) $[f(4 + h) - f(4)]/h$

Coba kerjakan...

Contoh Soal:

untuk $g(x) = 1/x$, cari dan sederhanakan
 $[g(a + h) - g(a)]/h$

Penyelesaian:

Coba Kerjakan ...

Daerah Asal dan Daerah Hasil

Fungsi yang lengkap, disamping aturan yang bersesuaian, harus dinyatakan daerah asal fungsi, misalnya fungsi dg aturan $F(x) = x^2 + 1$ dan daerah asal $\{0, 1, 2, 3\}$, maka daerah hasilnya adalah $\{1, 2, 5, 10\}$.

Daerah asal dan aturan menentukan daerah hasil. Jika daerah asal tidak dirinci, dianggap daerah asalnya adalah himpunan terbesar bilangan real sedemikian rupa sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan bilangan real. Ini disebut **daerah asal alami**

Contoh soal

Carilah daerah asal alami untuk:

a) $f(x) = 1/(x-3)$

b) $g(t) =$

$$\sqrt{9 - t^2}$$

c) $h(w) = 1/$

$$\sqrt{9 - w^2}$$

Peubah bebas dan Peubah tak bebas

Bilamana aturan suatu fungsi : $y = f(x)$,
maka x disebut peubah bebas
 y adalah peubah tak bebas

Sebarang nilai x boleh dipilih tetapi pilihan itu secara tuntas menentukan nilai padanan dari peubah tak bebas y .
Jadi nilai y bergantung pada pilihan x

Grafik Fungsi

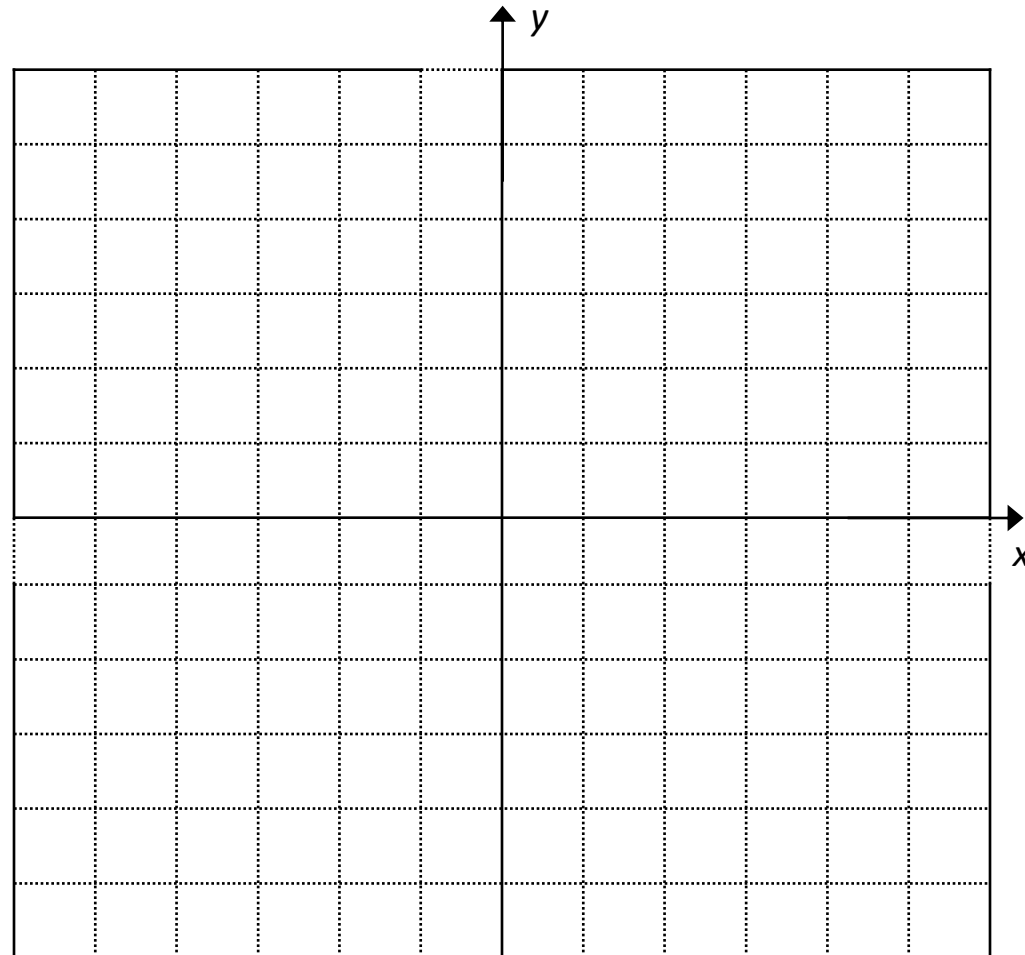
Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan himpunan bilangan real, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan grafik fungsi f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$

Contoh : Buatlah sketsa grafik dari:

$$y = x^2 - 2$$

Penyelesaian: Buat tabel nilai x dan $f(x)$, tugas selanjutnya hubungkan titik-titik ini dengan sebuah kurva pada bidang koordinat yang ada di bawah ini. **Perhatikan bahwa daerah asal fungsi ini adalah himpunan bilangan real**

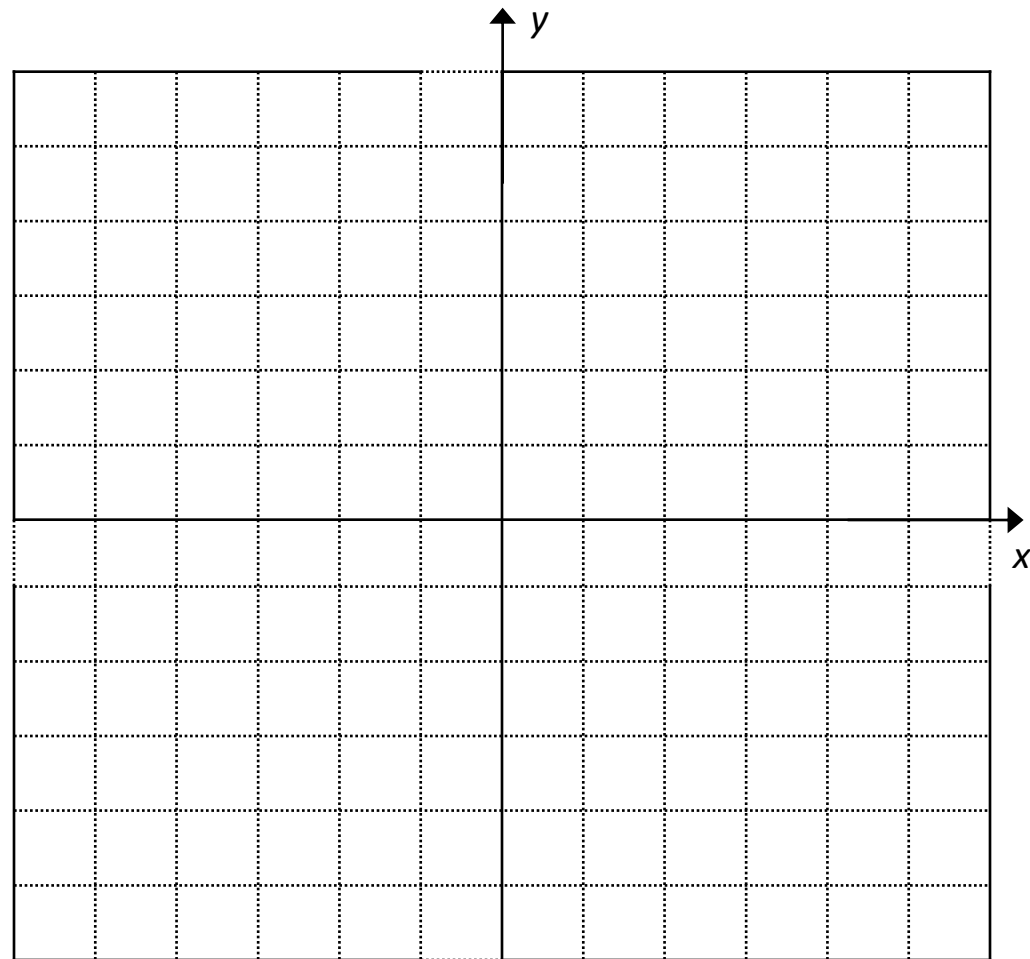
x	$f(x) = x^2 - 2$
-3	7
-2	2
-1	-1
0	-2
1	-1
2	2
3	7



Buatlah sketsa grafik $g(x) = 2/(x-1)$

Perhatikan bahwa daerah asal dari fungsi ini adalah himpunan bilangan real kecuali 1, karena kalau nilai $x=1$ akan menghasilkan $f(x)$ tak terdefinisi.

Coba buat tabel nilai x dan nilai $f(x)$ nya kemudian gambar grafiknya



FUNGSI GENAP DAN FUNGSI GANJIL

Jika $f(-x) = f(x)$ untuk semua nilai x , maka grafik fungsi akan simetris terhadap sumbu y . Fungsi demikian disebut fungsi genap.

Jika $f(-x) = -f(x)$ untuk semua nilai x , maka grafik fungsi akan simetris terhadap titik asal. Fungsi demikian disebut fungsi ganjil.

Berikan 1 contoh fungsi genap
dan 1 contoh fungsi ganjil.
Kemudian gambarkan sketsa grafiknya.

OPERASI PADA FUNGSI

Fungsi bukanlah bilangan tetapi terhadap fungsi f dan g dapat dikerjakan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan pangkat.

Ambil contoh

$$f(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

tentukan $f+g$ $f-g$

$$f \cdot g \quad \frac{f}{g}$$

Penyelesaian

Rumus

Daerah Asal

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x - 3}{2} + \sqrt{x} \quad [0, \infty)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x - 3}{2} - \sqrt{x} \quad [0, \infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x - 3}{2} \sqrt{x} \quad [0, \infty)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - 3}{2\sqrt{x}} \quad (0, \infty)$$

Kita harus hati-hati terhadap daerah asal. Bahwa x harus berupa bilangan yang berlaku untuk f maupun g . Dengan kata lain daerah asal $f + g$ misalnya adalah irisan dari daerah asal f dan g

Contoh

Andaikan $F(x) = \sqrt[4]{x}$ dan $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$

dengan daerah asal alami masing-masing adalah $[-1, \infty)$ dan $(-3, 3]$. Carilah rumus untuk

$F + G$ $F - G$ $F \cdot g$ F/G dan F^5

dan berikan daerah asal alaminya.

Komposisi Fungsi

Sebelumnya anda diminta untuk membayangkan sebuah fungsi sebagai sebuah mesin. Fungsi ini menerima x sebagai masukan (input), bekerja pada x , dan menghasilkan $f(x)$ sebagai keluaran (output). Dua mesin seringkali dapat diletakkan berdampingan untuk membuat sebuah mesin yang lebih rumit; demikian juga halnya dengan dua fungsi f dan g . Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan $f(x)$ dan g kemudian bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$, dikatakan bahwa kita telah *mengkomposisikan* g dengan f . Fungsi yang dihasilkan disebut **komposisi** g dengan f , yang dinyatakan dengan $g \circ f$. jadi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Contoh Komposisi Fungsi

Jika $f(x) = (x-3)/2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ maka

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Jadi jelas perbedaannya